AZTERKETA PARTZIALA

Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Ariketa 6	Guztira

Azterketaren iraupena: Ordu 1 eta 15 minutu

OHARRA: Azterketako emaitza guztiak behar den bezala arrazoitu behar dira.

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Kalkulatu hurrengo limiteak:

a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^a+1}{2n} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+n}{n^2+2}\right)^{\frac{n^a+1}{2n}} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(1.5 puntu)

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^a+1}{2n} = \begin{cases} 0 & \forall a<1 \\ \dfrac{1}{2} & a=1 \\ \infty & \forall a>1 \end{cases}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2+2}\right)^{\frac{n^a+1}{2n}} = \begin{cases} 1^0=1 & \forall a<1 \\ 1^{1/2}=1 & a=1 \\ 1^\infty = A & \forall a>1 \quad \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{L}A = \lim_{n\to\infty} \frac{n^a+1}{2n}\cdot \mathrm{L}\left(\frac{n^2+n}{n^2+2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{2n}\cdot\left(\frac{n^2+n}{n^2+2}-1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{2n}\cdot\frac{n^2+n-n^2-2}{n^2+2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{2n}\cdot\frac{n-2}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{2n^2} = \begin{cases} 0 & \forall a<2 \quad \Rightarrow \quad A=e^0=1 \\ \dfrac{1}{2} & a=2 \quad \Rightarrow \quad A=e^{1/2} \\ \infty & \forall a>2 \quad \Rightarrow \quad A=e^\infty=\infty \end{cases}$$

Beraz, emaitza guztiak bateratuz, $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+n}{n^2+2}\right)^{\frac{n^a+1}{2n}} = \begin{cases} 1 & \forall a<2 \\ e^{1/2} & a=2 \\ \infty & \forall a>2 \end{cases}$

2.- Aurkitu $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+......+\dfrac{1}{2n}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+.......+\dfrac{1}{2^n}}$ **(Puntu 1)**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+......+\dfrac{1}{2n}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+.......+\dfrac{1}{2^n}}=\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}}\overset{(*)}{=}\frac{\infty}{1}=\infty$$

(*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ beraz, dibergentea da $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}=\infty$

Eta, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ serie geometrikoa da, $r=\dfrac{1}{2}<1\Rightarrow$ konbergentea da. Eta, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1/2}{1-1/2}=1$

3.- a) Aztertu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2+\dfrac{(-1)^n}{3n}\right)$ **seriearen izaera.**

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ **konbergentea dela jakinda, non** $a_n>0\ \ \forall n$**, ondorioztatu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+1}{a_n}$ **eta** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{L}\left(a_n+1\right)$ **serieen izaera.**

(1.5 puntu)

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2+\dfrac{(-1)^n}{3n}\right)$ serieari baldintza beharrezkoa aplikatuko diogu:

$a_n=2+\dfrac{(-1)^n}{3n}\quad\Rightarrow\quad\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2\neq 0\quad\Rightarrow\quad\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ ezin da konbergentea izan.

Eta, $a_n>0\ \ \forall n\quad\Rightarrow\quad\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ dibergentea da.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ konbergentea denez $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

Orduan, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+1}{a_n}$ serieari baldintza beharrezkoa aplikatuz gero:

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+1}{a_n}=\infty\neq 0\quad\Rightarrow\quad\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+1}{a_n}$ dibergentea da (gai positiboz osaturiko seriea baita)

Eta, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{L}\left(a_n+1\right)$ seriearen kasuan konparaziozko irizpidea erabiliz:

$\mathrm{L}\left(a_n+1\right)\sim a_n\quad\Rightarrow\quad\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{L}\left(a_n+1\right)$ konbergentea da.

4.- Aztertu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n+2)}{n^n}$ **seriearen izaera.**

(Puntu 1)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non $a_n = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n+2)}{n^n} > 0 \quad \forall n$

D´Alambert-en irizpidea plikatuz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n+2)\cdot(2n+4)}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+4}{n+1} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\cdot \frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} 2\cdot \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konbergentea da.}$$

5.- a) Aurkitu $f(x) = e^{-x}$ **funtzioaren McLaurin 3. mailako polinomioa.**

b) Aurreko atalean lortutako polinomioa erabiliz, $f(0.1)$**-ren balio hurbildua kalkulatzean egindako errorea mugatu.**

(2 puntu)

a) *f* funtzioaren McLaurin 3. mailako polinomioa honako hau da:

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad f(0) = 1 \\ f'(x) = -e^{-x} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = -1 \\ f''(x) = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 1 \\ f'''(x) = -e^{-x} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow P_3(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!}$$

b) Aurreko polinomioa erabiliz, $f(0.1) \simeq P_3(0.1)$ litzateke, eta, hurbilketa honi dagokion errorea Lagrange-ren hondarraren balio absolutuak emango du:

$r_3(x) = \frac{f^{4)}(\theta x)}{4!}\cdot x^4$, non $f^{4)}(x) = e^{-x}$ beraz, $x = 0.1 = \frac{1}{10}$ puntuan ordezkatuz:

$$\text{errorea} = \left|r_3(0.1)\right| = \frac{e^{-\theta/10}}{4!}\cdot(0.1)^4 = \frac{e^{-\theta/10}}{4!\cdot 10^4} \overset{(*)}{<} \frac{1}{4!\cdot 10^4}$$

(*) $0 < \theta < 1 \quad \Rightarrow \quad e^{-\theta/10} = \frac{1}{e^{\theta/10}} < \frac{1}{e^{0/10}} = 1$

6.- a) Aurkitu $f(x)=\mathrm{L}(e^2+x^2)$ funtzioaren berretura-seriezko garapena, non balio duen adieraziz.

b) Kalkulatu $f^{16)}(0)$ eta $f^{17)}(0)$.

(3 puntu)

a) $f(x)=\mathrm{L}(e^2+x^2) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{2x}{e^2+x^2}=\dfrac{\frac{2x}{e^2}}{1+\frac{x^2}{e^2}}\overset{(*)}{=}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x}{e^2}\cdot\left(-\frac{x^2}{e^2}\right)^n=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{e^{2n+2}}\cdot x^{2n+1} \quad \forall x\in(-e,e)$$

(*) f' serie geometrikoaren batura da:

$r=-\dfrac{x^2}{e^2}\Rightarrow$ [konbergentea da $\Leftrightarrow |r|=\dfrac{x^2}{e^2}<1\Leftrightarrow |x|<e$]

Eta, emaitza hori integratuz:

$$f(x)\overset{(**)}{=}2+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{e^{2n+2}}\cdot\frac{x^{2n+2}}{2n+2} \quad \forall x\in(-e,e)$$

(**) $f(0)=\mathrm{L}(e^2)=2\mathrm{L}(e)=2$

Orain, $x=\pm e$ puntuak aztertuko ditugu:

$f(x)=\mathrm{L}(e^2+x^2)$ jarraitua da puntu bietan.

Eta, lortutako garapena puntu horietan ordezkatuz, $2+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+2}$ seriea dugu, absolutuki konbergentea ez dena, baina Leibniz-en teorema egiaztatzen duena. Orduan, konbergentea da, eta, ondorioz, garapenak batura jarraitua dauka $x=\pm e$ puntuetan.

Beraz, $f(x)=2+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{e^{2n+2}}\cdot\frac{x^{2n+2}}{2n+2} \quad \forall x\in[-e,e]$

b) Aurreko atalean lortutako berretura-seriezko garapena *f* funtzioaren Taylor-en seriea da, hau da: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n)}(0)}{n!}\cdot x^n$

Beraz, $f^{16)}(0)$ garapen horretako 16. mailako batugaian agertzen da:

$$2n+2=16 \quad \Leftrightarrow \quad n=7 \quad \Rightarrow \quad (-1)^7\frac{2}{e^{2\cdot 7+2}}\cdot\frac{x^{2\cdot 7+2}}{2\cdot 7+2}=-\frac{2}{e^{16}}\cdot\frac{x^{16}}{16}=\frac{f^{16)}(0)}{16!}\cdot x^{16} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f^{16)}(0)=-\frac{2}{e^{16}}\cdot\frac{16!}{16}=-\frac{2\cdot 15!}{e^{16}}$$

$f^{17)}(0)=0$ berretura-seriezko garapenean maila bikoitiko batugaiak baino ez daudelako.